# Ιδιότητες ορίων:

**Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο $x_0$** και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right) = c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ , για κάθε $c\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ , με την προϋπόθεση ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$

Ασκήσεις:

1. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right)=2$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-g(x)\right)=-7$ , να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

   Λύση:

   Προσοχή: Θα ήταν λάθος να παρασυρθούμε και να γράψουμε:

   $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 2$ , εφόσον δεν ξέρουμε ότι υπάρχουν τα επιμέρους όρια $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$. Ο σωστός τρόπος λύσης είναι ο ακόλουθος:

Θέτουμε: $h(x)=f(x)+g(x)$ και $w(x)=f(x)-g(x)$ , των οποίων τα όρια στο 2 υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί. Έπειτα λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς τις συναρτήσεις $f$ και $g$ , οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=f(x)+g(x) \\ w(x)=f(x)-g(x) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} h(x)+w(x)=2f(x) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\big(h(x)+w(x)\big)$$

και $$\left.\begin{array}{l} h(x)=f(x)+g(x) \\ w(x)=f(x)-g(x) \end{array}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow} h(x)-w(x)=2g(x) \Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}\big(h(x)-w(x)\big)$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{2}\big(h(x)+w(x)\big)\right]$ και επειδή τώρα ξέρουμε ότι τα επιμέρους όρια υπάρχουν θα είναι:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{2}\big(h(x)+w(x)\big)\right] = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to 2} h(x)+\lim_{x\to 2} w(x)\Big) = \frac{2-7}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{2}\big(h(x)-w(x)\big)\right] = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to 2} h(x)-\lim_{x\to 2} w(x)\Big) = \frac{2-(-7)}{2} = \frac{9}{2}$$

Όμοια, μπορούμε να λύσουμε και οποιαδήποτε αντίστοιχη άσκηση, όπως την:

2. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)+3g(x)\big)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\big(2f(x)-g(x)\big)=10$ , να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

Θέτοντας ως : $h(x)=f(x)+3g(x)$ και $w(x)=2f(x)-g(x)$ και λύνοντας το σύστημα αυτών των δύο εξισώσεων ως προς $f$ και $g$ .